certains ensembles de particules, que les champs interfaciaux peuvent également être renversés. Une molécule, primitivement attirée d'un côté de l'interface peut, par suite d'une haute pression, être attirée de l'autre; en somme une miscibilité peut être modifiée; ou encore des molécules normalement fixes, peuvent acquérir une certaine probabilité de migration du fait que certaines forces de cohésion s'estompent devant des forces de répulsion accrues. Apparemment, il semble que les courbes de fusion se prolongent; mais on peut aboutir à des corps se vaporisant les uns dans les autres par suite du renversement ou même du simple affaiblissement des barrières interfaciales. L'abaissement d'une telle barrière est en effet analogue à l'abaissement d'une chaleur de vaporisation, donc à l'augmentation de la tension de vapeur saturante. Les grandes viscosités qui règnent vraisemblablement aux très hautes pressions ne peuvent empêcher les migrations de se produire lorsque le temps n'est pas limité. C'est cet ensemble de phénomènes que j'ai proposé d'appeler l'*anamigmatisme*.

Il est indispensable de noter que ces résultats découlent de l'étude mathématique de certains ensembles de particules bien définis. Il est pour l'instant impossible d'affirmer que les forces intermoléculaires des corps existants conduisent réellement à un anamigmatisme; mais il m'a semblé utile de signaler aux géologues que du point de vue purement mécanique de tels phénomènes étaient parfaitement concevables.

Zusammenfassung

Die heute vorhandene Kenntnis der zwischen den Atomen wirkenden Kräfte gestattet die Voraussage, daß alle Materialien unter sehr hohen Drucken Eigenschaften zeigen können, die von den unter gewöhnlichen Verhältnissen zu beobachtenden wesentlich abweichen. Es wird gezeigt, daß dies in besonderem Maße für die Mischbarkeit der verschiedenen Substanzen gelten wird.

Communications provisoires - Vorläufige Mitteilungen
Comunicazioni preliminari - Preliminary reports

Inhaltsungleichungen für innere und äußere Parallelmengen

Es sei A eine abgeschlossene und beschränkte Punktmenge des gewöhnlichen Raumes. (Die folgenden Ausführungen können ohne weiteres auf den n-dimensionalen euklidischen Raum übertragen werden; lediglich zur Vereinfachung der Schreibweise wählen wir den speziellen Fall $n = 3$.) – Es bezeichne A_ϱ die äußere abgeschlossene Parallelmenge von A im Abstand ϱ (CANTOR-MINKOWSKIsche Hülle), das heißt die Vereinigungsmenge aller abgeschlossenen Kugeln vom Radius ϱ, deren Mittelpunkte in A liegen. Analog sei $A_{-\varrho}$ die innere abgeschlossene (evtl. leere) Parallelmenge im Abstand ϱ, das heißt die Menge $A_{-\varrho} = ((A^*)\varrho)^*$; hierbei soll der Stern den Übergang zu der komplementären Menge bezeichnen.

Für die Inhalte (LEBESGUEsche Masse) V, V_ϱ und $V_{-\varrho}$ der Mengen A, A_ϱ und $A_{-\varrho}$ gelten die folgenden Relationen: Es ist

$$V_\varrho \geqq V + \sqrt[3]{36\pi V^2}\,\varrho + \sqrt[3]{48\pi^2 V}\,\varrho^2 + \frac{4\pi}{3}\varrho^3; \quad (1)$$

falls $A_{-\varrho}$ nicht leer ist, gilt

$$V_{-\varrho} \leqq V - \sqrt[3]{36\pi V^2}\,\varrho + \sqrt[3]{48\pi^2 V}\,\varrho^2 - \frac{4\pi}{3}\varrho^3. \quad (2)$$

In beiden Ungleichungen gilt das Gleichheitszeichen dann, wenn A eine Kugel ist. Für die Ungleichung (1) hat der Verfasser im Rahmen einer noch nicht veröffentlichten Abhandlung über MINKOWSKIsche Masse und Isoperimetrie einen einfachen Beweis gegeben. Setzt man

$$F = \liminf_{\varrho \to 0} \frac{V_\varrho - V}{\varrho},$$

so resultiert aus (1) die «isoperimetrische Ungleichung»

$$F^3 \geqq 36\pi V^2,$$

wobei F eine Oberflächenmaßzahl von A im Sinne MINKOWSKIs ist. Die Ungleichung (2) resultiert aus (1) im Hinblick auf die leicht zu verifizierende Relation

$$A \supset (A_{-\varrho})_\varrho.$$

H. HADWIGER

Mathematisches Seminar der Universität Bern, den 31. Oktober 1946.

Summary

Inequalities will be stated which will be valid for the volumes of the outer and inner parallel-sets of a closed and bounded set of the common space.

Neue Vorschläge für Maschinen zur Beschleunigung elektrisch geladener Teilchen

Fig. 1 zeigt in Aufriß und Grundriß eine Maschine zur Beschleunigung von Teilchen mit *zur Lichtgeschwindigkeit kleiner Geschwindigkeit*, also *schwerer Teilchen*. Ein rotationssymmetrischer evakuierter Hohlraumresonator

A wird durch eine im Strombauch *induktiv magnetisch gekoppelte* Sendetriode in seiner Grundschwingung erregt, so daß über den Kreisringkondensator *B* im Spannungsbauch eine hohe Wechselspannung von *konstanter Amplitude* auftritt. Eine Ionenquelle *C* sendet mit der gleichen *konstanten Frequenz* Teilchenimpulse in den Feldraum des Kreisringkondensators, die durch Werte in der Nähe des positiven Scheitelwertes der Wechselspannung ein erstes Mal beschleunigt werden. Nach dieser ersten Beschleunigung werden die Teilchenimpulse durch einen ersten Leitkanal *D* in ihrer Richtung um 180° umgelenkt und nach einer halben Periode der Wechselspannung dem Kreisringkondensator zu einer zweiten Beschleunigung wieder zugeführt. Der zweiten Beschleunigung folgt in einem zweiten Leitkanal *E* eine zweite Umlenkung um 180° und nach einer weiteren halben Periode eine dritte Beschleunigung usw. Nach Durchlaufen des n-ten Leitkanals *F* erfahren die Teilchenimpulse eine $(n+1)$-te und letzte Beschleunigung, um dann in einem Strahl *G* parallel zur Achse des Hohlraumresonators, z. B. durch ein Fenster, aus der Maschine frei auszutreten. Die Leitkanäle sind über Halbkreise führende, in die Platten des Kreisringkondensators dicht eingesetzte Rohre aus nichtferromagnetischem Metall. Jedes dieser Rohre befindet sich zwischen den Polschuhen eines Magnetsystems, das in ihm ein *zeitlich konstantes* Führungsfeld mit *optimaler fokussierender Wirkung* erregt. Ist die Intensität dieses magnetischen Führungsfeldes in allen n Leitkanälen ungefähr gleich, so verhalten sich die Radien der Halbkreise aufeinander folgender Leitkanäle angenähert wie $\sqrt{1}:\sqrt{2}:\sqrt{3}:\ldots:\sqrt{n}$. Der Radius des Halbkreises des n-ten und letzten Leitkanals ist gleich dem mittleren Radius des Kreisringkondensators. Die Teilchenbahn ist also einer von der Ionenquelle bis zum Strahlaustritt im Radius wachsenden Schraubenlinie ähnlich. Für die Anzahl n der Leitkanäle setzt die Möglichkeit der konstruktiven Anordnung der Magnetsysteme über dem n-ten und dem $(n-2)$-ten Leitkanal eine mit der Wellenlänge der Wechselspannung zunehmende obere Grenze. Da im Innern des Hohlraumresonators, insbesondere im Bereiche seines Spannungsbauches elektrische Isolatoren nicht vorhanden sind, ist der Erhöhung der Amplitude der beschleunigenden Wechselspannung zunächst keine Grenze gesetzt, dagegen sind die elektrischen Feldstärken an allen metallischen Oberflächen mit Rücksicht auf autoelektronische Entladungen zu limitieren. Mit n zwischen 10 und 100 erhält man am Strahlaustritt genügend breite und ausreichend homogene Teilchenimpulse, und zwar auch dann, wenn die synchronen Teilchen durch die Scheitelwerte der Wechselspannung beschleunigt werden, und also der Teilchenimpuls im wesentlichen aus gegenüber dem synchronen Teilchen verspäteten und in der Phase semistabilen Teilchen besteht, wodurch außerdem die beste Ausnützung der beschleunigenden Wechselspannung erzielt wird. Die Maschine hat gegenüber Anordnungen, bei denen *ein und dieselbe Bahn viele Male durchlaufen* wird (Synchrotron und Betatron), Vorteile: Das Injizieren der Teilchenimpulse und das Herausholen des Strahls bedarf keiner besonderen Einrichtungen. Ionenquelle und austretender Strahl sind frei zugänglich. Frequenz und magnetische Führungsfelder sind konstant, also

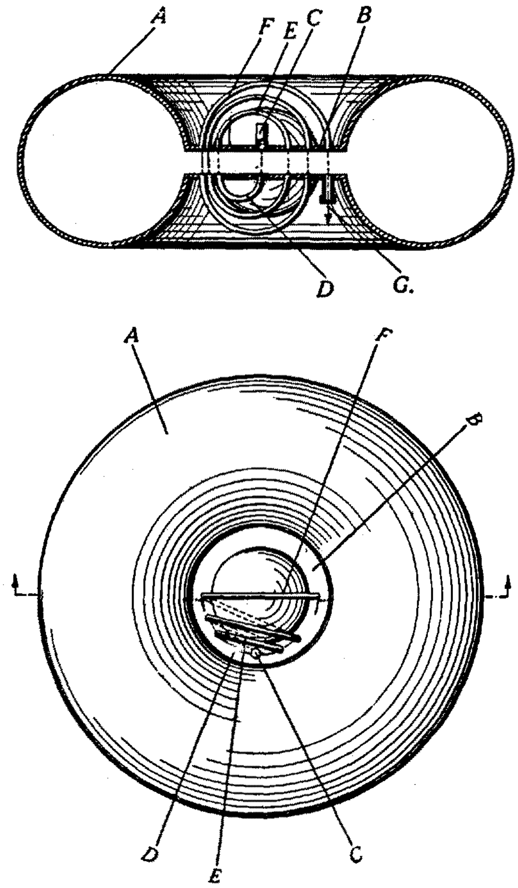

Fig. 1. Beschleuniger für schwere Teilchen.

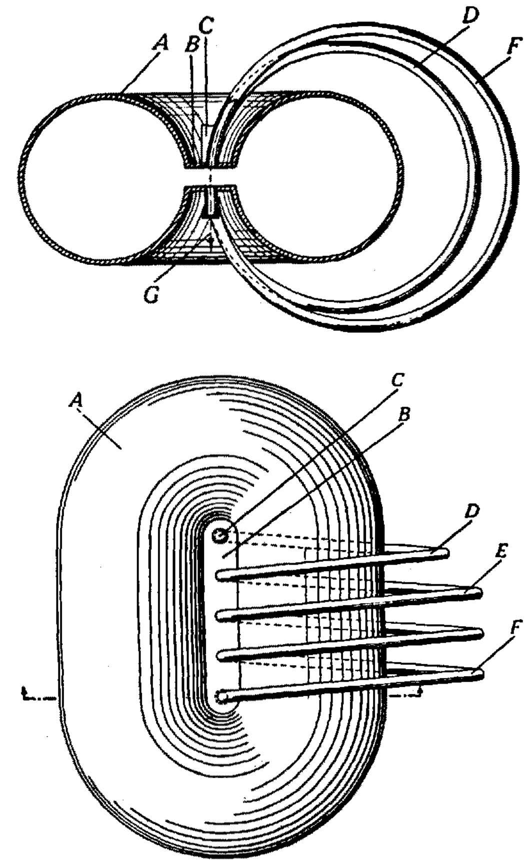

Fig. 2. Beschleuniger für Elektronen.

weder Mittelfrequenz noch Kondensatorenbatterie zur Kompensation einer Blindleistung sind erforderlich. Endlich ist die Ausnützung der Ionenquelle um mehrere Größenordnungen (etwa 10^4) besser, weil *in jeder Periode der Wechselspannung* ein Teilchenimpuls injiziert werden kann, wodurch der Strahlstrom entsprechend heraufgeht. Eine weitere Erhöhung des Strahlstroms ergibt sich aus der Verkürzung der gesamten Bahnlänge.

Fig. 2 zeigt in Aufriß und Grundriß und mit entsprechenden Bezugszeichen eine ähnliche Maschine wie Fig. 1, aber zur Beschleunigung von *Elektronen*, die bereits nach der zweiten Beschleunigung *nahezu Lichtgeschwindigkeit* haben. Die Länge eines vollen Umlaufs ist also vom zweiten bis zum n-ten und letzten Umlauf nahezu konstant und gleich der Wellenlänge der beschleunigenden Wechselspannung. Das liefert Abmessungen der Leitkanäle D, E bis F, für die mit Rücksicht auf eine kompendiöse Ausbildung des Hohlraumresonators A nur *eine* Beschleunigung pro Umlauf zweckmäßig ist. Die Beschleunigungen eines Teilchenimpulses folgen sich in Zeitabständen gleich der Periodendauer der Wechselspannung. Ordnet man die Leitkanäle wie die Gänge einer Schraubenlinie geringer Steigung hintereinander, so können die die magnetischen Führungsfelder erzeugenden Magnetsysteme der einzelnen Leitkanäle zu einem für alle Leitkanäle gemeinsamen Magnetsystem vereinigt werden, was eine wesentliche Einsparung an Material ermöglicht. Die Intensität der magnetischen Führungsfelder nimmt von Leitkanal zu Leitkanal proportional der Masse der Elektronen zu. Die Teilchenimpulsbreite beträgt bei sonst gleichen Verhältnissen, insbesondere gleichen Anforderungen an die Homogenität des austretenden Strahls etwa ein Viertel der Impulsbreite bei Teilchen mit zur Lichtgeschwindigkeit kleiner Geschwindigkeit. Die Strahlungsdämpfung der Elektronen bildet bei 10^3 MeV noch keine Begrenzung der Endenergie, weil der Energiezuwachs pro Umlauf groß gemacht werden kann gegenüber dem entsprechenden Verlust an Energie durch Strahlung.

WALTER DÄLLENBACH

Zürich, den 21. September 1946.

Summary

New proposals concerning machines for the acceleration of electrically charged particles are briefly described with two examples (heavy particles, electrons).

Über ebene axialsymmetrische Punktmengen[1]

Es bezeichnen M eine ebene Punktmenge und $M(a)$ die daraus durch Spiegelung an einer Achse a entstandene Menge. Wird $M(a)$ an einer zweiten Achse b gespiegelt, so entsteht die Menge $M(a)(b)$ oder kürzer $M(a, b)$, usw. Ist $\bar{b}$ das Spiegelbild von b an a, so ist $M(\bar{b}) = M(a, b, a)$; die Symmetrie der Menge M an a ist durch die Gleichung $M = M(a)$ gekennzeichnet. Aus $M(a) = M$ und $M(b) = M$ folgt $M(\bar{b}) = M(a, b, a) = M(b, a) = M(a) = M$. Mit a und b ist also auch $\bar{b}$ Symmetrale von M. Hat M endlich viele Symmetralen und schneiden sich diese in einem Punkt S, dann bilden sie ein reguläres Geradenbüschel, wie leicht aus dem vorangehenden Satz gefolgert werden kann. Der Winkel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Symmetralen ist dann $\alpha = \frac{\pi}{n}$ (n Anzahl der Symmetralen). Hat M insbesondere genau zwei Symmetralen, so stehen diese aufeinander senkrecht.

Schneiden sich zwei Geraden a, b in s unter dem Winkel α, so kann man diese durch endlich viele weitere Geraden zum System der Symmetralen einer Punktmenge ergänzen oder nicht, je nachdem $\frac{\alpha}{\pi}$ rational oder irrational ist. Der erste Teil der Behauptung ist leicht einzusehen; um den zweiten zu beweisen, legen wir jede Symmetrieachse a_φ von M durch den Winkel φ fest, um den man a im positiven Sinne drehen muß, um a_φ zu erhalten. Mit $b = a_\alpha$ sind alle Geraden $a_{n\alpha}$ (mod π) Symmetrieachsen von M. Nach dem Gleichverteilungstheorem von H. WEYL[1] ist die Menge $n\alpha$ (mod π) in sich dicht, falls $\frac{\alpha}{\pi}$ irrational ist. Daraus folgt, daß es dann zu jeder Geraden g durch s eine Symmetrale gibt, die mit g einen beliebig kleinen Winkel einschließt. Ist ferner (a_{α_n}) eine Folge von Symmetralen einer abgeschlossenen Menge A, und ist $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \beta$, so ist auch a_β Symmetrale von A wie man leicht nachrechnet. Da danach zu jeder Geraden a_β eine Folge von Symmetralen (a_{α_n}) mit $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \beta$ angegeben werden kann, folgt daraus, daß mit a und b jede Gerade durch S Symmetrale von A ist. Ist M nicht abgeschlossen, so gilt dies nicht, wie man am Beispiel der Punkte am Einheitskreis mit rationalem Winkelparameter zeigen kann. Denn diese Menge ist nur in bezug auf alle Geraden mit rationalem Winkelparameter symmetrisch.

Ist M beschränkt und bedeutet K_M den Hüllkreis von M, das ist die kleinste abgeschlossene Kreisscheibe, die M vollständig überdeckt, so ist, wie man mühelos schließt $K_{M(a)} = K_M(a)$. Ist a eine Symmetrieachse von M, so folgt $M(a) = M$ also $K_M(a) = K_M$; a ist mithin auch Symmetrale von K_M, geht also durch seinen Mittelpunkt. Daraus folgt, daß sich alle Symmetralen einer beschränkten Menge in einem Punkt schneiden. Ist M nicht beschränkt, so brauchen sich die Symmetralen nicht in einem Punkte schneiden, wie man am trivialen Beispiel der ganzen Ebene sieht.

W. KOSMATH und W. GRAEUB

Baden b. Wien und Feldkirch (Vorarlberg), den 7. Oktober 1946.

Summary

The principal results of the present inquiries are: If a plane quantity of points "M" has a finite number of symmetrals "n", which intersect in a point "S", these symmetrals form a regular fascicle of straight lines, with an angle $\frac{\pi}{n}$ of two subsequent symmetrals. If "α" is the angle between two straight lines with the intersection point "S", you may or may not supplement them to a regular fascicle of symmetrals of a quantity of points "M", by adding a finite number of straight lines, according as "α" represents a rational or irrational multiple of 2π. If the angle "α" of two symmetrals of "M" with the intersection point "S" is

[1] Die Verfasser sind zur vorliegenden mathematischen Untersuchung durch den Versuch einer mathematischen Behandlung verschiedener Probleme, die Gasausscheidung aus gashältigen Flüssigkeiten betreffend, veranlaßt worden.

[1] Math. Ann. 77, 313–15 (1916).